Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Dans tout l'énoncé, on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 1 (4 points)

1 - Dans un plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Soit A, B, C, D un parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

a) - Montrer que les droites (AD) et (DC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie s de centre O.
Montrer que O est le centre du parallélogramme ABCD.

b) - Soit Δ l'image de la droite (AB) par la rotation r de centre O, d'angle $(+\frac{\pi}{2})$. Etablir que Q est commun aux droites (BC) et Δ.

2 - Soient A, B, C, D les points de coordonnées respectives (1, −2), (3, 2), (−1, 2) et (−3, −2), dans un plan orienté rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (On donnera les coordonnées des sommets de ce carré).

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que pour tout réel x,

$$f''(x) - f(-x) = x.$$

On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$.

1 - a) Calculer à l'aide de f et de ses dérivées f', f'' les dérivées premières et secondes de h et g.

b) En déduire que les fonctions h et g vérifient les équations différentielles :

(1) $g'' = g$

(2) $h'' = -h$.

2 - Déterminer l'ensemble des fonctions paires solutions de (1) et l'ensemble des fonctions impaires solutions de (2).

3 - Exprimer f en fonction de g et h. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que pour tout élément x de $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \lambda(e^x + e^{-x}) + \mu \sin x + x.$$

Inversement une telle fonction est-elle solution du problème posé ?

Tournez la page S. V. P.

PROBLEME (11 points)

I - On munit le plan P d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité est 5 cm. On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

1 - Etudier les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle. (On précisera les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisse $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$).

2 - Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie sur R par

$$F(x) = (a\cos x + b\sin x)\, e^{-x}$$

soit une primitive de f.

Calculer l'aire limitée par Γ, les droites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, et l'axe des abscisses. Exprimer le résultat en cm^2.

II - On se propose d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$.

1 - Existe-t-il des points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, 0]$?

2 - Soit φ la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$\varphi(x) = e^{-x}\cos x - x$$

a) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(\frac{\pi}{2})$.

b) Etudier les variations de φ.

c) En déduire qu'il existe un réel unique α de $]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $e^{-\alpha}\cos\alpha = \alpha$ (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$).

d) On pose $\beta = f(1) = e^{-1}\cos 1$.

En prouvant d'abord que $\alpha < 1$, puis en utilisant le sens de variation de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, montrer l'encadrement :

$$\beta < \alpha < 1.$$

3 - On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$, et par la relation de récurrence, vérifiée pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier n,

$$\beta \leq u_n \leq 1.$$

b) On pose $k = |f'(\beta)|$.

En étudiant le signe de f'' sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$ prouver que, sur cet intervalle,

$$f'(0) < f'(x) \leq f'(\tfrac{\pi}{2}).$$

En déduire que $k < 1$. Prouver que, pour tout réel x de $[\beta, 1]$,

$$|f'(x)| \leq k.$$

c) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|.$$

d) En déduire que la suite (u_n) converge vers α quand n tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail